Problemi di Fisica

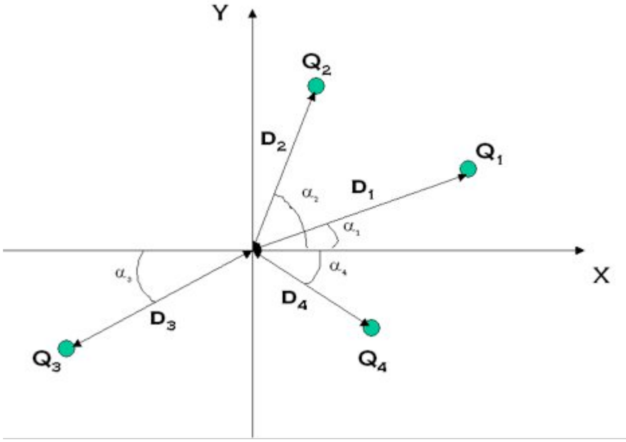
ELETTROMAGNETISMO

Il campo elettrico

Problema

Data la distribuzione di carica rappresentata in figura, calcolare il campo elettrico prodotto nell'origine degli assi cartesiani. I dati sono:

Q_1 = -3e	Q_2 = +4e	Q_3 = +5e	Q_4 = -e
D_1 = 3 cm	D_1 = 2 cm	D_3 = 2 cm	D_4 = 3 cm
$\alpha_1 = 30°$	$\alpha_2 = 70°$	$\alpha_3 = 40°$	$\alpha_4 = 45°$



Soluzione

Le quattro cariche generano nell'origine degli assi i vettori campo elettrico E_1, E_2, E_3, E_4, rispettivamente. Dobbiamo quindi trovare modulo e direzione di questi quattro vettori.

Per trovare i moduli applichiamo la definizione di campo elettrico:

$$E_1 = K \cdot \frac{Q_1}{D_1^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3e}{\left(3 \cdot 10^{-2}\right)^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{9 \cdot 10^{-4}} = 4{,}8 \cdot 10^{-6} N/C$$

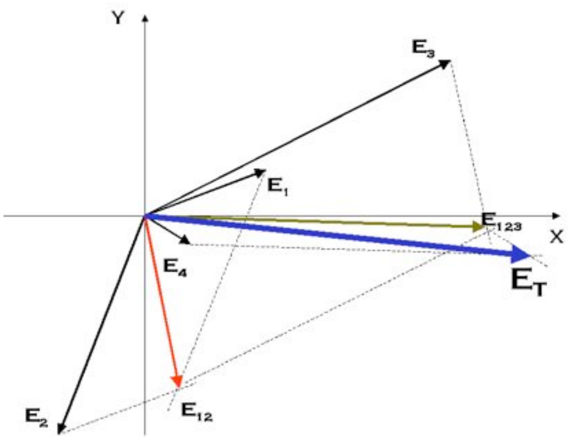
$$E_2 = K \cdot \frac{Q_2}{D_2^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{4e}{\left(2 \cdot 10^{-2}\right)^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{4 \cdot 10^{-4}} = 14{,}4 \cdot 10^{-6} N/C$$

$$E_3 = K \cdot \frac{Q_3}{D_3^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{5e}{\left(2 \cdot 10^{-2}\right)^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{4 \cdot 10^{-4}} = 18 \cdot 10^{-6} N/C$$

$$E_4 = K \cdot \frac{Q_4}{D_4^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{e}{\left(3 \cdot 10^{-2}\right)^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{9 \cdot 10^{-4}} = 1{,}6 \cdot 10^{-6} N/C$$

Ora dobbiamo trovare l'orientamento dei quattro vettori campo elettrico nell'origine, tenendo presente che per una carica positiva il vettore campo elettrico è un vettore uscente dalla carica, mentre per una carica negativa è un vettore entrante nella carica.

L'orientamento dei vettori è riportato nel seguente diagramma, dove abbiamo anche trovato graficamente il vettore campo elettrico totale agente nell'origine:



Adesso possiamo trovare le componenti di ciascun vettore su ogni asse e quindi le componenti del vettore campo elettrico totale E_T:

Componenti di E_1	Componenti di E_2
$E_{1X} = E_1 \cdot \cos\alpha_1 = 4{,}8 \cdot 10^{-6} \cdot \cos 30° = 4{,}2 \cdot 10^{-6} N/C$ $E_{1Y} = E_1 \cdot sen\alpha_1 = 4{,}8 \cdot 10^{-6} \cdot sen 30° = 2{,}4 \cdot 10^{-6} N/C$	$E_{2X} = E_2 \cdot \cos\alpha_2 = 14{,}4 \cdot 10^{-6} \cdot \cos 70° = 4{,}9 \cdot 10^{-6} N/C$ $E_{2Y} = E_2 \cdot sen\alpha_2 = 14{,}4 \cdot 10^{-6} \cdot sen 70° = 13{,}5 \cdot 10^{-6} N/C$
Componenti di E_3	**Componenti di E_4**
$E_{3X} = E_3 \cdot \cos\alpha_3 = 18 \cdot 10^{-6} \cdot \cos 40° = 13{,}8 \cdot 10^{-6} N/C$ $E_{3Y} = E_3 \cdot sen\alpha_3 = 18 \cdot 10^{-6} \cdot sen 40° = 11{,}6 \cdot 10^{-6} N/C$	$E_{4X} = E_4 \cdot \cos\alpha_4 = 1{,}6 \cdot 10^{-6} \cdot \cos 45° = 1{,}1 \cdot 10^{-6} N/C$ $E_{4Y} = E_4 \cdot sen\alpha_4 = 1{,}6 \cdot 10^{-6} \cdot sen 45° = 1{,}1 \cdot 10^{-6} N/C$

$$E_{XT} = \sum E_X = E_{1X} - E_{2X} + E_{3X} + E_{4X} = 4{,}2 \cdot 10^{-6} - 4{,}9 \cdot 10^{-6} + 13{,}8 \cdot 10^{-6} + 1{,}1 \cdot 10^{-6} = 14{,}2 \cdot 10^{-6} N/C$$

$$E_{YT} = \sum E_Y = E_{1Y} - E_{2Y} + E_{3Y} - E_{4Y} = 2{,}4 \cdot 10^{-6} - 13{,}5 \cdot 10^{-6} + 11{,}6 \cdot 10^{-6} - 1{,}1 \cdot 10^{-6} = -0{,}6 \cdot 10^{-6} N/C$$

Per ottenere il modulo di E_T ci serviremo del teorema di Pitagora e per ottenere la sua orientazione utilizzeremo la definizione di tangente:

$$E_T = \sqrt{E_{XT}^2 + E_{YT}^2} = \sqrt{(14{,}2 \cdot 10^{-6})^2 + (-0{,}6 \cdot 10^{-6})^2} = \sqrt{202 \cdot 10^{-12} + 0{,}36 \cdot 10^{-12}} = \sqrt{202{,}4 \cdot 10^{-12}} =$$
$$= 0{,}014 \cdot 10^{-6} N/C$$

$$tg\alpha = \frac{E_{YT}}{E_{XT}} = \frac{-0{,}6 \cdot 10^{-6}}{14{,}2 \cdot 10^{-6}} = -0{,}04 \qquad \alpha = arctg\alpha = -2{,}3°$$

Problema

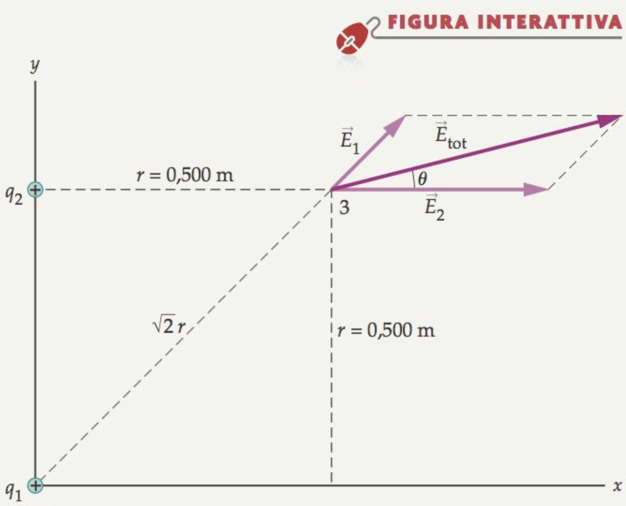
Due cariche, ciascuna di +2,90 μC, sono poste su due vertici consecutivi di un quadrato di lato 0,500 m, come nella figura. Determina l'intensità e la direzione del campo elettrico risultante in un terzo vertice del quadrato, nel punto indicato come 3 nella figura.

DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Nel diagramma sono mostrate le posizioni delle due cariche e il campo elettrico prodotto da ognuna di esse. La differenza fondamentale tra questo disegno e quello dell'esempio svolto 4 è che qui non c'è una carica nel punto 3; in questo punto il campo elettrico esiste anche se non ha alcuna carica sulla quale esercitare una forza.

STRATEGIA

Analogamente all'esempio svolto 4, calcoliamo prima le intensità di $\vec{E}_1$ ed $\vec{E}_2$ e poi le loro componenti. Sommando queste ultime otteniamo le componenti del campo elettrico risultante. Una volta note le componenti di $\vec{E}_{tot}$ calcoliamo la sua intensità e direzione con lo stesso metodo utilizzato nell'esempio 4 per $\vec{F}_{tot}$.



SOLUZIONE

Calcoliamo l'intensità di $\vec{E}_1$:

$$E_1 = k\frac{|q_1|}{(\sqrt{2}r)^2} = (8,99 \cdot 10^9\ N \cdot m^2/C^2)\frac{(2,90 \cdot 10^{-6}\ C)}{2(0,500\ m)^2} = 5,21 \cdot 10^4\ N/C$$

Calcoliamo l'intensità di $\vec{E}_2$:

$$E_2 = k\frac{|q_2|}{r^2} = (8,99 \cdot 10^9\ N \cdot m^2/C^2)\frac{(2,90 \cdot 10^{-6}\ C)}{(0,500\ m)^2} = 1,04 \cdot 10^5\ N/C$$

Calcoliamo le componenti di $\vec{E}_1$ e di $\vec{E}_2$:

$$E_{1,x} = E_1 \cos 45,0° = (5,21 \cdot 10^4\ N/C)(0,707) = 3,68 \cdot 10^4\ N/C$$

$$E_{1,y} = E_1 \operatorname{sen} 45,0° = (5,21 \cdot 10^4\ N/C)(0,707) = 3,68 \cdot 10^4\ N/C$$

$$E_{2,x} = E_2 \cos 0° = (1,04 \cdot 10^5\ N/C)(1) = 1,04 \cdot 10^5\ N/C$$

$$E_{2,y} = E_2 \operatorname{sen} 0° = (1,04 \cdot 10^5\ N/C)(0) = 0$$

Calcoliamo le componenti di $\vec{E}_{tot}$:

$$E_{tot,x} = E_{1,x} + E_{2,x} = 3,68 \cdot 10^4\ N/C + 1,04 \cdot 10^5\ N/C = 1,41 \cdot 10^5\ N/C$$

$$E_{tot,y} = E_{1,y} + E_{2,y} = 3,68 \cdot 10^4\ N/C + 0 = 3,68 \cdot 10^4\ N/C$$

Calcoliamo l'intensità di $\vec{E}_{tot}$:

$$E_{tot} = \sqrt{E_{tot,x}{}^2 + E_{tot,y}{}^2} = \sqrt{(1,41 \cdot 10^5\ N/C)^2 + (3,68 \cdot 10^4\ N/C)^2} = 1,46 \cdot 10^5\ N/C$$

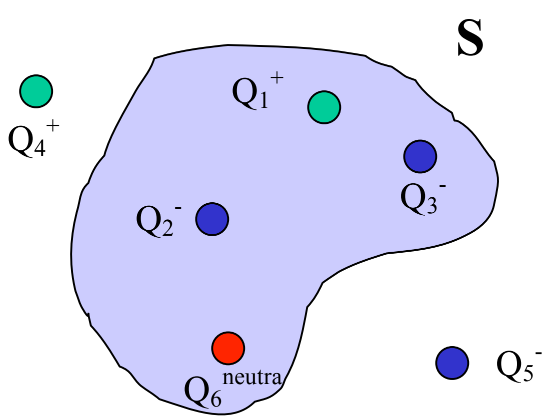
Determiniamo la direzione di $\vec{E}_{tot}$:

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1}(E_{tot,y}/E_{tot,x}) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{3,68 \cdot 10^4\ N/C}{1,41 \cdot 10^5\ N/C}\right) = 14,6°$$

Problema

Data la distribuzione di carica in figura, determinare il flusso del campo elettrico attraverso la superficie S. I dati sono:

$Q_1 = Q_4 = +\,3,1$ nC $\quad Q_2 = Q_5 = -5,9$ nC $\quad Q_3 = -3,1$ nC $\quad Q_6 =$ neutra



Soluzione

Il flusso del campo elettrico attraverso la superficie S, che chiameremo superficie gaussiana, si calcola attraverso la legge di Gauss:

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{\sum Q_{interna}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{\varepsilon_0} = \frac{+3{,}1\cdot 10^{-9} - 5{,}9\cdot 10^{-9} - 3{,}1\cdot 10^{-9}}{8{,}85\cdot 10^{-12}} = -670\,\frac{N\cdot m^2}{C}$$

Notare:

- La carica neutra non dà nessun contributo al flusso, anche se è inclusa nella superficie S
- Le cariche Q_4 e Q_5 non danno nessuno contributo al flusso perché sono esterne alla superficie S e non sono perciò incluse in $\Sigma Q_{interna}$
- Il segno meno indica che la carica netta all'interno della superficie S è negativa e che il flusso attraverso S è entrante.

Problema

Una carica q=0,12C si trova nel centro di una sfera con una superficie di 34,5m². Calcolare il campo elettrico sui punti della sfera

Soluzione

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{tot}}{\varepsilon_0} \Rightarrow Q_{tot} = \Phi_S(\vec{E})\varepsilon_0 = ES\varepsilon_0 \Rightarrow E = \frac{Q_{tot}}{S\varepsilon_0} = \frac{1{,}2\times 10^{-1}\,\mathrm{C}}{(34{,}5\,\mathrm{m}^2)\times[8{,}85\times 10^{-12}\,\mathrm{C}^2/(\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2)]} = 3{,}9\times 10^{8}\,\mathrm{N/C}$$

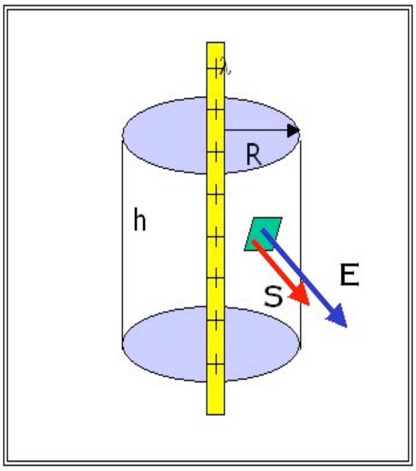
Problema

La parte visibile di un fulmine è preseduta da una fase invisibile in cui una colonna di elettroni si estende da una nuvola verso terra. Questi elettroni provengono dalla nuvola e dalle molecole dell'aria ionizzate all'interno della colonna. La densità di carica lineare lungo la colonna è tipicamente $\lambda = -1\cdot 10^{-3}$ C/m. Quando la colonna raggiunge la terra, gli elettroni contenuti in essa vengono scaricati rapidamente a terra. Durante la scarica, le collisioni tra gli elettroni e l'aria della colonna danno luogo ad un lampo brillante di luce. Se le molecole d'aria si ionizzano quando l'intensità di campo elettrico è E = $3\cdot 10^{6}$ N/C, qual è il raggio della colonna?

Soluzione

Per risolvere questo problema, facciamo prima delle considerazioni di carattere generale. Sia data una bacchetta di plastica, carica, infinitamente lunga, con una densità di carica λ uniforme. Troviamo il campo elettrico ad una distanza R dall'asse della bacchetta, utilizzando il teorema di Gauss.

La scelta della superficie gaussiana dovrebbe adattarsi alla simmetria del problema, che è cilindrica, per cui scegliamo un cilindro circolare di raggio R e lunghezza h, coassiale con la bacchetta.



Attraverso la superficie laterale S_L il flusso è dato da:

$$\Phi(\vec{E}) = \vec{E} \bullet \vec{S} = E \cdot S_L \cdot \cos\alpha = E \cdot S = E \cdot (2\pi R \cdot h)$$

Notare :

- $\alpha = 0°$ tra E ed S $\Rightarrow \cos 0° = 1$ $\qquad S_L = 2\pi R \cdot h$

Attraverso le basi del cilindro il flusso è nullo perché:

$$\alpha = 90° \text{ tra E ed S } \Rightarrow \cos 0° = 1 \Rightarrow \Phi(\vec{E}) = 0$$

In definitiva, applicando il teorema di Gauss, otteniamo:

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E \cdot 2\pi R \cdot h = \frac{\lambda \cdot h}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \cdot R} \quad (1) \qquad \text{dove: } Q_{int} = \lambda \cdot h$$

Ritorniamo al nostro problema, e sebbene la colonna non sia rettilinea né infinitamente lunga, si può considerare approssimativamente una carica lineare.

Per trovare il raggio della colonna, risolviamo la (1) rispetto ad R:

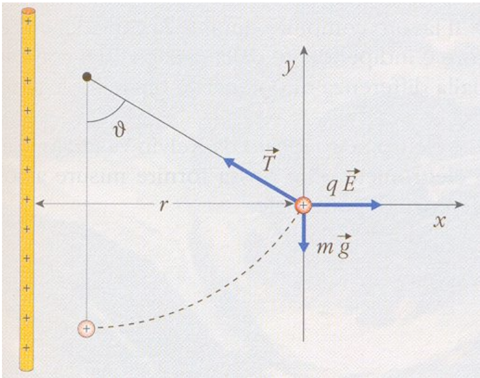
$$R = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \cdot E} = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{2\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^{6}} = 6m$$

Notare

- Il campo elettrico E si dirige radialmente verso l'interno poiché la colonna è fatta di elettroni
- Sebbene la colonna possa essere soltanto di 6 m di raggio, non si creda di essere al sicuro se ci si trova ad una distanza maggiore dal punto d'impatto del fulmine, perché gli elettroni trasportati dal fulmine si propagano sul terreno e queste correnti di terra sono letali.

Problema

Un pendolino elettrico di massa m=4,0 g e carica q=0,20 μF si trova in equilibrio nel campo elettrico generato da un filo carico infinitamente lungo, la cui densità lineare di carica è λ= 4,0·10^{-5} C/m.
Se all'equilibrio la distanza della sferetta del pendolino dal filo carico è r=1,5 m e il pendolino è deviato di un angolo θ rispetto alla verticale, calcolare:



1. l'intensità del campo elettrico
2. l'intensità T della tensione del filo e l'ampiezza dell'angolo θ

Soluzione

1. Si dimostra che l'intensità di un filo infinitamente lungo è data da:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Sostituendo i dati del problema otteniamo:

$$E = \frac{4{,}0 \cdot 10^{-5}}{2\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 1{,}5} = 4{,}8 \cdot 10^{5}\ \text{N/C}$$

2. Come si vede dalla figura, sulla sferetta agiscono la forza elettrica F_e = qE, la forza peso P = mg e la tensione T del filo.

Essendo il pendolino in equilibrio, applichiamo la condizione d'equilibrio alla carica q:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_e + \vec{P} + \vec{T} = 0 \qquad (1)$$

Fissato un sistema di assi cartesiani, scomponiamo la (1) secondo gli assi e otteniamo un sistema di due equazioni nelle incognite T e θ :

$$\begin{cases} qE - T\sin\vartheta = 0 \\ T\cos\vartheta - mg = 0 \end{cases}$$

Il sistema ammetterà le seguenti soluzioni:

$$\mathrm{tg}\vartheta = \frac{qE}{mg} = \frac{0{,}20 \cdot 10^{-6} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{5}}{4{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}81} = 2{,}45 \Rightarrow \vartheta = 68°$$

$$T = \frac{mg}{\cos\vartheta} = \frac{4{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}81}{\cos 68} = 0{,}10\ \text{N}$$

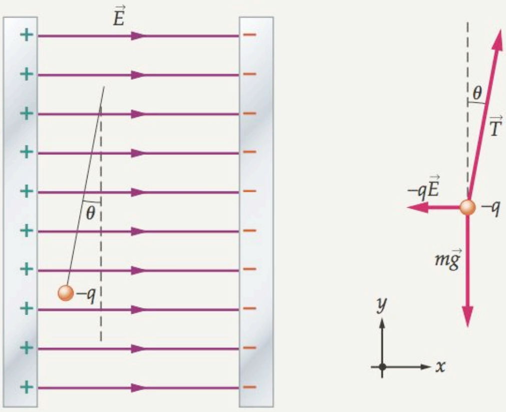
Problema

Il campo elettrico tra le armature di un condensatore a facce piane e parallele è orizzontale, uniforme e ha un'intensità E. Un piccolo oggetto di massa 0,0250 kg e carica $-3{,}10\ \mu C$ è sospeso a un filo situato tra le due armature, come mostrato nella figura. Il filo forma un angolo di 10,5° con la verticale. Calcola:
a) la tensione nel filo;
b) l'intensità del campo elettrico.

Soluzione

DESCRIZIONE DEL PROBLEMA
Il disegno mostra il filo che forma un angolo $\theta = 10{,}5°$ con la verticale. Lo schema sulla destra mostra il diagramma di corpo libero dell'oggetto sospeso, insieme alla nostra scelta per gli assi. Osserviamo che abbiamo indicato la carica del corpo con $-q$, essendo $q = 3{,}10\ \mu C$, per mettere in evidenza con chiarezza il segno.

FIGURA INTERATTIVA



STRATEGIA
Il principio fisico alla base di questo problema è che, essendo il corpo in quiete, la forza risultante cui è sottoposto deve essere nulla. Perciò, ponendo le componenti x e y della forza risultante uguali a zero, otteniamo due condizioni che possono essere utilizzate per ricavare le due incognite T ed E.

SOLUZIONE
Poniamo uguale a zero la componente x della forza risultante: $-qE + T \operatorname{sen}\theta = 0$

Poniamo uguale a zero la componente y della forza risultante: $T\cos\theta - mg = 0$

a) Poiché nell'equazione della componente y della forza conosciamo tutte le grandezze tranne la tensione, utilizziamola per ricavare T:

$$T = \frac{mg}{\cos\theta} = \frac{(0{,}0250\ \text{kg})(9{,}81\ \text{m/s}^2)}{\cos(10{,}5°)} = 0{,}249\ \text{N}$$

b) Utilizziamo ora l'equazione della componente x della forza risultante per ricavare l'intensità del campo elettrico:

$$E = \frac{T \operatorname{sen}\theta}{q} = \frac{(0{,}249\ \text{N})\operatorname{sen}(10{,}5°)}{3{,}10 \cdot 10^{-6}\ \text{C}} = 1{,}46 \cdot 10^{4}\ \text{N/C}$$

OSSERVAZIONI
Come previsto, il corpo carico negativamente è attratto dall'armatura carica positivamente. Questo significa che la forza elettrica cui è soggetto ha direzione opposta al campo elettrico.

Problema

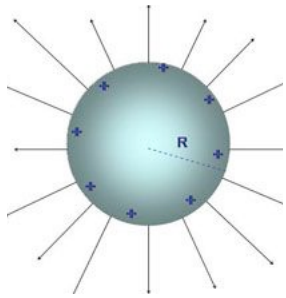
Una carica puntiforme q, di massa trascurabile, si trova in equilibrio tra una distribuzione lineare infinita con densità di carica λ=5,6C/m e un piano infinito di carica con densità σ=4,2C/m^2. Determinare a che distanza dal filo si trova la carica.

Soluzione

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$$

$$\frac{\sigma q}{2\varepsilon_0} = \frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0 r} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{\pi\sigma}{\lambda} \Rightarrow r = \frac{\lambda}{\pi\sigma} = \frac{5{,}6\ \text{C/m}}{3{,}14 \times 4{,}2\ \text{C/m}^2} = 0{,}42\ \text{m}$$

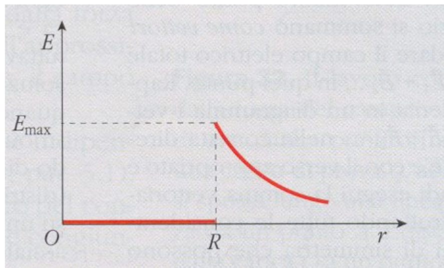
Problema



Determinare il campo elettrico generato in ogni punto dello spazio da una sfera conduttrice omogenea di raggio R elettrizzata con una carica Q

Soluzione

In condizioni di equilibrio elettrostatico il campo elettrico, in base al teorema di Gauss, è nullo in tutti i punti interni alla sfera.
Inoltre sappiamo che la carica elettrica di un conduttore si distribuisce interamente sulla sua superficie. In particolare, avendo a che fare con una sfera conduttrice, ossia con un conduttore di forma simmetrica, la carica Q si disporrà sulla superficie in maniera uniforme.
Si tratta, dunque, di una distribuzione superficiale di carica a simmetria sferica, il cui campo elettrico esterno coincide con quello di una carica puntiforme Q posta nel centro.



- Per punti esterni alla sfera ($r > R$) il campo è diretto radialmente (verso uscente se Q è positiva, entrante se Q negativa) e il suo modulo è:

$$E = K \cdot \frac{Q}{r^2}$$

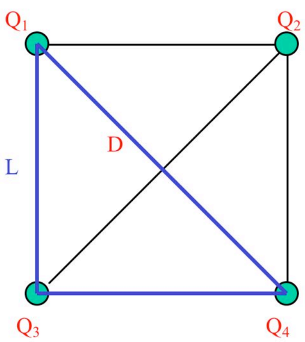
ossia il campo decresce come $1/r^2$ a partire dal valore massimo $E_{max} = K \cdot \frac{Q}{R^2}$ raggiunto sulla superficie della sfera ($r = R$)

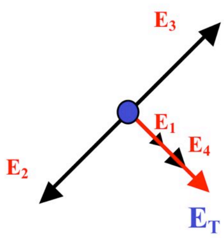
- Per punti interni alla sfera ($r < R$) il campo è nullo.

Problema

Quattro cariche puntiformi sono disposte nei vertici di un quadrato come in figura. Dopo aver eseguito una rappresentazione in scala dei campi generati dalle singole cariche nel centro del quadrato, determinare il campo elettrico totale.

($Q_1 = +3 \cdot 10^{-10}$ C $Q_2 = +6 \cdot 10^{-10}$ C $Q_3 = +6 \cdot 10^{-10}$C $Q_4 = -2 \cdot 10^{-10}$C L = 10 cm)





Soluzione

La distanza di ciascuna carica dal centro del quadrato è pari alla metà della diagonale del quadrato, che si calcola applicando il teorema di Pitagora al triangolo di lato L:

$$D = \sqrt{L^2 + L^2} = \sqrt{2L^2} = L \cdot \sqrt{2} = 0{,}1 \cdot \sqrt{2} = 0{,}14m \Rightarrow \frac{D}{2} = 0{,}07m$$

Il campo elettrico prodotto da ciascuna carica nel centro del quadrato è dato da:

$E_1 = K \cdot \frac{Q_1}{\left(\frac{D}{2}\right)^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-10}}{(0{,}07)^2} = +5{,}5 \cdot 10^2 N/C$	$E_2 = K \cdot \frac{Q_2}{\left(\frac{D}{2}\right)^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{6 \cdot 10^{-10}}{(0{,}07)^2} = +11 \cdot 10^2 N/C$
$E_3 = K \cdot \frac{Q_3}{\left(\frac{D}{2}\right)^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{6 \cdot 10^{-10}}{(0{,}07)^2} = +11 \cdot 10^2 N/C$	$E_4 = K \cdot \frac{Q_4}{\left(\frac{D}{2}\right)^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(-2 \cdot 10^{-10})}{(0{,}07)^2} = -3{,}7 \cdot 10^2 N/C$

A questo punto siamo in grado di riportare in scala i singoli campi elettrici e determinare graficamente il campo elettrico totale prodotto nel centro del quadrato. Come si vede dalla figura, i campi elettrici E_2 e E_3 sono uguali ed opposti, quindi si annullano, mentre E_1 e E_2 sono concordi e quindi si possono sommare. Pertanto il campo elettrico totale è dato da:

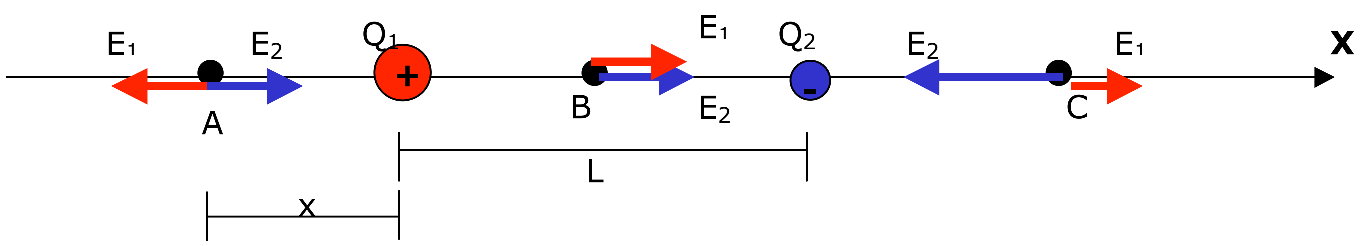
$$E_T = E_1 + E_4 = 5{,}5 \cdot 10^2 + 3{,}7 \cdot 10^2 = 9{,}2 \cdot 10^2 N/C$$

Problema

Due cariche puntiformi $Q_1 = 20\ \mu C$ e $Q_2 = -40 \mu C$ distano 1 m l'una dall'altra. Determinare il punto sulla retta individuata dalle due cariche in cui il campo elettrico è nullo.

Soluzione

Innanzitutto stabiliamo da che parte è situato il punto:



Tenendo presente la definizione di campo elettrico, valgono le seguenti considerazioni:

- se il punto fosse C, in esso agirebbero due campi elettrici opposti, ma E_2 sarebbe più grande di E_1 in quanto la carica Q_2, oltre ad essere più vicina al punto C, ha un valore più grande della carica Q_1;quindi nel punto C il campo elettrico totale non può essere nullo;

- se il punto fosse in B, su di esso agirebbero due campi elettrici concordi, per cui in B il campo elettrico totale non può essere nullo;

- se il punto fosse A, su di esso agirebbero due campi elettrici opposti, ed essendo la carica Q_2 più lontana, la posizione A sarà quella in cui il campo elettrico totale è nullo.

La condizione per cui nel punto A il campo elettrico totale sia nullo è la seguente:

$$(1)\quad E_1 - E_2 = 0$$

Se fissiamo l'origine dell'asse X nel punto A e indichiamo con x la posizione del punto A rispetto a Q_1, la (1) diventa:

$$K\cdot\frac{Q_1}{x^2} = K\cdot\frac{Q_2}{(x+L)^2} \Rightarrow \frac{20\cdot10^{-6}}{x^2} = \frac{40\cdot10^{-6}}{(x+L)^2} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{2}{(x+L)^2} \Rightarrow (x+L)^2 = 2x^2$$

$$x^2 + 2x\cdot L + L^2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x\cdot L + L^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x\cdot L - L^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

L'equazione da risolvere è un'equazione di 2° grado le cui soluzioni sono:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm 2.8}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{2+2.82}{2} = 2.41\text{m} \Rightarrow x_2 = \frac{2-2.8}{2} = -0.4\text{m}$$

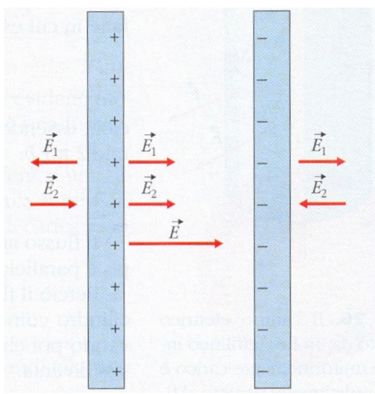
Per come abbiamo fissato l'asse X, la soluzione x_2 è da scartare per cui la soluzione del problema è:

$$x_2 = 2.41\ \text{m}$$

il campo elettrico è nullo all'esterno del segmento individuato dalle due cariche a 2,41 m di distanza da Q_1.

Problema

In un condensatore piano ideale, infinitamente esteso, le due armature possiedono densità superficiali di carica rispettivamente uguali a $+\sigma$ e a $-\sigma$. Determinare il campo elettrico all'interno e all'esterno del condensatore.



Soluzione

Per il principio di sovrapposizione, il campo elettrico E in ogni punto dello spazio è uguale alla somma vettoriale dei campi elettrici E_1 ed E_2 generati in quello stesso punto, separatamente, dalle due armature cariche.

L'armatura a sinistra che possiede una densità superficiale di carica $+\sigma$, produce un campo elettrico E_1 diretto perpendicolarmente alla sua superficie in verso *uscente,* di modulo:

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

L'armatura a destra, con densità superficiale $-\sigma$, produce invece un campo elettrico E_2 in verso *entrante*, avente modulo.

$$E_2 = E_1$$

All'esterno del condensatore i due campi elettrici si annullano, per cui il campo risultante ha modulo:

$$E = 0$$

Nello spazio compreso fra le due piastre, invece, i due campi hanno verso concorde e quindi i loro moduli, entrambi uguali a:

$$E_1 = E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

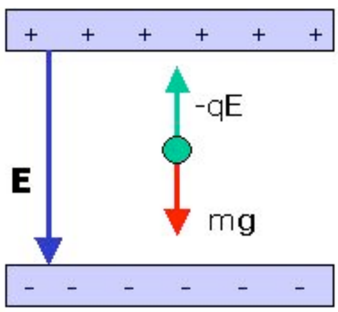
si sommano.

In conclusione, dentro al condensatore il campo è *uniforme*, diretto perpendicolarmente dall'armatura positiva a quella negativa, con modulo:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Problema

Una particella di massa m = 2,0 g e carica q = -2,5·10^{5} C si trova in equilibrio nel campo elettrico uniforme di un condensatore carico.
Calcolare la densità superficiale di carica sulle armature del condensatore.



Soluzione

Il campo elettrico tra le armature piane del condensatore è dato da:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

da cui ricaviamo la formula per il calcolo della densità superficiale:

$$\sigma = \varepsilon_0 E$$

Pertanto il problema si riduce al calcolo del campo elettrico tra le armature del condensatore. Poiché la particella è in equilibrio nel campo elettrico, le due forze che agiscono su q, la forza peso P = mg diretta verticalmente verso il basso e la forza elettrica F = -qE diretta verticalmente verso l'alto, per la condizione di equilibrio, si devono bilanciare, quindi:

$$qE = mg$$

da cui ricaviamo il valore del campo elettrico uniforme:

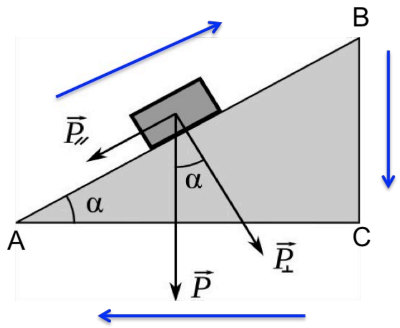
$$E = \frac{mg}{q} = \frac{2{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}81}{2{,}5 \cdot 10^{5}} = 7{,}8 \cdot 10^{-8} N/C$$

Infine, noto il campo elettrico, possiamo calcolare la densità superficiale:

$$\sigma = 8{,}859 \cdot 10^{-12} \cdot 7{,}8 \cdot 10^{-8} = 69 \cdot 10^{-20} C/m^2$$

Problema

Una corpo di massa 3,0 kg viene fatto salire lungo un piano lungo 2,0 m e inclinato di 30°, poi cade lungo la verticale e scorre in orizzontale fino al punto iniziale. Calcolare la circuitazione del vettore campo gravitazionale e motiva il risultato. Per un campo elettrostatico valgono le stesse considerazioni e perchè?



Soluzione

Dobbiamo applicare la definizione di circuitazione (somma dei lavori compiuti da una forza lungo un percorso chiuso):

$$C = \sum \vec{F} \bullet \Delta \vec{s}$$

Il lavoro viene compiuto dalle forze del campo gravitazionale:

$$C(\vec{g}) = \sum \vec{F} \bullet \Delta \vec{s} =$$

$$P_{//} \cdot AB \cdot \cos 180° + P \cdot BC \cdot \cos 0° + P \cdot CA \cdot \cos 90° = -mg sen 30° \cdot 2 + mg \cdot 1 + 0 = -30 + 30 + 0 = 0$$

dove: BC=ABsenα=2sen30°=1 m

La circuitazione del campo gravitazionale lungo il percorso chiuso ABC è nulla. Questo significa che il campo gravitazionale è un campo conservativo. Le stesse considerazioni valgono anche per il campo elettrostatico perché è un campo conservativo. In generale:

Un campo vettoriale è conservativo se e solo se la sua circuitazione è nulla su ogni linea chiusa:

$$C(\vec{E}) = 0$$